مقارنة الحلول لمسألة انتشار الحرارة الممثلة بالمعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية من خلال التطبيق

أ . علي عمر عمار الدالي ـ قسم الهندسة النفطية ـــ كلية هندسة الموارد الطبيعية بالعجيلات ـ جامعة الزاوية.

الملخص :

يقدم هذا العمل طريقتي لإيجاد حل **مسألة** انتشار الحرارة غير الخطية مبنية على طريقة تفريق دوميان وطريقة هرموتوبي وتحققنا من تقارب الطريقتين وحصلنا على نتائج دقيقة وفعالة من خلال التطبيق.

المقدمة :

تعد المعادلات التفاضلية الجزئية أساسية لفهم الكثير من المسائل الرياضية والفيزيائية المهمة يعبر عنها بمعادلات تفاضلية جزئية **[2]** مثل تدفق الحرارة والخ ... كذلك الظواهر التي تتضمنها ميكانيكا الموائع والكهرباء وميكانيكا الكم كلها موصوفة بتلك المعادلات هي معادلات غير خطية والعثور على الحلول التحليلية الدقيقة لمثل هذه المسائل صعب للغاية لذا ركز الرياضيون اهتمامهم على حل مثل هذا النوع وعرض الكثير من الطرائق لهذا الغرض ومن أهم هذه الطرق:

طريقة تحليل أدوميان ADM(Adomian Decomposition Method) **طريقة هوموتوبي الإضراب** HPM(Homotopy Perturbation Method)

وتعد هذه الطرائق [8]حديثة وقوية وفعالة للغاية حيث إنها قادرة على حل المعادلات التفاضلية العادية و التفاضلية الجزئية و التكاملية والتفاضلية التكاملية الخطية وغير الخطية **[6-7- 9** – 8– 12]

- **معادلة كلاين – غوردون– فوك**

حيث تعتبر من أهم النماذج الرياضية في نظرية الحقل الكمومية وهي معادلة مشتقة من صيغة الطاقة النسبية وتظهر في الفيزياء النسبية ، أيضاً تستخدم لوصف ظاهرة تشتت الموجة ، وتظهر في البصريات غير الخطية وفيزياء البلازما [8-4] .

- **معادلة الموجة :**

وهي معادلة تفاضلية جزئية تصف بشكل عام حركة الأمواج سواء كانت أمواجا صوتية أو ضوئية أو مائية وتعبر عن انتشار الموجات الصوتية والكهرومغناطيسية أو نقل الإشارات الكهربائية في الكبل [8] .

- **معادلة انتشار الحرارة:** هي معادلة تفاضلية جزئية وهي معادلة تصف التوصيل الحراري وتغير الحرارة في الأجسام ولهذه المعادلة عدة استعمالات منها في المجالات الهندسية والفيزيائية، وخاصة في مجال تدفق الحرارة
- **نموذج معادلات تفاضلية جزئية خطية و غير خطية[8]**

كل من المعادلات التفاضلية العادية والجزئية يمكن أن تصنف إلى خطية وغير خطية. وتكون المعادلة التفاضلية خطية بشرطين:

1. إذا كانت معاملات المتغير التابع والمشتقات فيها دوال في المتغير المستقل فقط أو ثوابت.
2. إذا كان المتغير التابع والمشتقات غير مرفوعة لأسس، أي كلها من الدرجة الأولى

وتكون غير خطية فيما عدا ذلك.

- **طريقة تحليل أدومايين:**

في عام 1980 قدم الأمريكي جورج أدوميان طريقة جديدة فعالة لحل المعادلات الدالية غير الخطية سميت هذه الطريقة بـــ (Adomian Decomposition Method) نسبة إليه ورموزها ADM .[2-7] وهذه الطريقة تتضمن الدالة المجهولة u(x,y) لأي معادلة إلى مجموع من الأعداد ألانهائية للعناصر الأساسية التي تعرف بسلسلة التحليل

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) \quad n \geq 0 \qquad (*)$$

ومن أجل توضيح طريقة (Adomian)

خطوات الطريقة : [9 , 8 , 7 , 6 , 5 , 4 , 3 , 2]

1) لتكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$Lu + Ru + Nu = f \qquad (1)$$

حيث إن L مؤثر تفاضلي يمثل المشتق من أعلى مرتبة وقابل للعكس ،و N مؤثر غير خطي و R مؤثر تفاضلي خطي يمثل الحدود الخطية المتبقية في المعادلة و f حد غير متجانس .

2) بما ان المؤثر L يمثل المشتق فإن المؤثر العكسي هو مؤثر التكامل والآن نطبق المؤثر العكسي L^{-1} على طرفي المعادلة السابقة فتصبح المعادلة كالتالي :

$$L^{-1}Lu = L^{-1}f - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \qquad (2)$$

$$\rightarrow \quad u = g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \qquad (3)$$

حيث g ناتجة عن مكاملة f بالإضافة إلى الحدود الناتجة عن تطبيق الشروط الحدية أو الابتدائية المرفقة بالمعادلة .

3) إن **طريقة تحليل أدوماين** تعرف الحل u على شكل متسلسلة غير منتهية من المركبات كالتالي :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \qquad (4)$$

وتستبدل الحد غير الخطي بمتسلسلة غير منتهية من حدوديان أدوميان A_n كالتالي:

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \qquad (5)$$

حيث تعطى حديديات أدوميان العلاقة :

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n}\left(N\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i\right)\right)\right]_{\lambda=0} \qquad n \geq 0 \qquad (6)$$

وبالتالي :

$$A_0 = N(u_0)$$

$$A_1 = u_1 N'(u_0)$$

$$A_2 = u_2 N'(u_0) + \frac{1}{2}(u_1)^2 N''(u_0)$$

نعوض (4) و (5) في (3) فنحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = g - L^{-1}R\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) \qquad (7)$$

طريقة تحليل أدومابن تعرف المركبةu_0 بأنها g أي أن المركبة الصفرية هي كل الحدود التي لا يشملها المؤثر العكسي والتي ليس لها علاقة بالدالة u وبالتالي فإن العلاقة التكرارية للمركبات تصبح كالتالي :

$$u_0 = g$$

$$u_{k+1} = -L^{-1}R(u_k) - L^{-1}(A_k) \quad k \geq 0 \qquad (8)$$

إن هذه الطريقة تعطى متسلسلة حلول متقاربة وإن متسلسلة الانقطاع تعطى حلاً تقريبا [5]

مثال

معادلة كلابن غوردن غير الخطية :

$$u_u = u_{xx} + (u_x)^2 - u^2 \qquad (9)$$

مع الشرطين الابتدائيين :

$$u(x\,,0) = 0 \quad , \qquad u_t(x\,,0) = e^x$$

وحلها الفعلي :

$$u(x\,,t) = e^x \sin ht$$

الحـــــــــــــل

1) من المعادلة (9) نجد أن :

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,, \qquad Nu = (u_x)^2 - u^2 \quad , \quad Ru = u_{xx} \quad , \quad f = 0$$

2) بما أن المؤثر الخطي هو مؤثر المشتق الثاني للزمن فإن مؤثره العكسي هو مؤثر التكامل أي : $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \;\; \rightarrow \; L^{-1} = \int_0^t \int_0^t (.)dt\,dt$

نطبق المؤثر العكسي على طرفي المعادلة (9) فنحصل على العلاقة التالية :

$$u(x,t) = e^x t + \int_0^t \int_0^t u_{xx}\,dt\,dt \; + \int_0^t \int_0^t (u_x)^2\,dt\,dt \qquad (10)$$

3) الآن نعوض العلاقتين (4) و (5) في (10) فنجد :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$$
$$= e^x t + \int_0^t \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)\right)_{xx} dt\, dt\ +$$
$$+ \int_0^t \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) dt\, dt \qquad (11)$$

4) من العلاقة (11) نحصل على :

$$\rightarrow u_0(x,t) = e^x t$$
$$u_{k+1}(x,t) = \int_0^t \int_0^t u_k(x,t)\, dt\, dt\ + \int_0^t \int_0^t (A_k)\, dt\, dt \qquad k \geq 0 \qquad (12)$$
$$u_1(x,t) = \int_0^t \int_0^t \big(u_0(x,t)\big)_{xx}\ dt\, dt\ + \int_0^t \int_0^t (A_k)\, dt\, dt \qquad k \geq 0$$

وبالحساب نحصل على :

$$u_1(x,t) = \frac{e^x t^3}{3!}$$
$$u_2(x,t) = \frac{e^x t^5}{5!}$$
$$u_3(x,t) = \frac{e^x t^7}{7!}$$
$$\vdots$$
$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + \cdots$$
$$u(x,t) = e^x \left(t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} + \cdots\right)$$

$\rightarrow \quad u(x,t) = e^{x} \sin ht$

مفهوم الهوموتوبي :هو مفهوم أساسي **(تشوه دالة مستمرة إلي دالة أخرى)** وهو يعود إلى الرياضي الفرنسيJules Henri Poincare [1] في التبولوجيا والهندسة التفاضلية [5] حيث تكمن أهمية طريقة HPM في قدرتها على استخدام الهوموتوبي وتوظيفه في حل أصعب المسائل .

ففي عام 2006 استخدمت **طريقة هوموتوبي الإضراب** لحل معادلات تفاضلية غير خطية في مجال الحرارة [1] وفي عام 2010 تم تطبيقها لحل معادلات تفاضلية ومعادلات تكاملية [17] وفي 2015 استخدمت لحساب القيم الذاتية [16] بينما في عام 2016 أسهمت في حل مسالة Braru [15] وتوصلوا إلى نتائج فعالة أظهرت أهمية الطريقة المدروسة

وفيما يلي سنعرض الطريقة

طريقة هومونربي الاضراب (Homotopy Perturbation Method)-HPM

تُعد هذه الطريقة حديثة وقوية وفعالة للغاية ، حيث إنها قادرة على حل المعادلات (التفاضلية العادية والتفاضلية الجزئية و التكاملية والتفاضلية التكاملية) الخطية وغير الخطية [9-8-12] . وقد استخدمها الباحثون لحل العديد من مسائل القيم الحدية والابتدائية وتوصلوا الى نتائج فعالة أظهرت أهمية الطريقة المدروسة ,

ويعرف الهوموتوبي بين دالتين مستمرتين *f(x) , g(x)* من فضاء تبولوجي X إلى فضاء تبولوجيY على أنه الدالة المستمرة :

$$H : X\,(\,[0,1]\,) \rightarrow Y$$

بحيث يتحقق أنه إذا كان :

$$x \in X \qquad \rightarrow H(x;0) = f(x) \qquad , \qquad H(x;1) = g(x)$$

فإن له الصيغة التالية :

$$H(x;q) = (1-\mathrm{q})\mathrm{f(x)} + qg(x); \quad 0 \le q \le 1 \qquad (13)$$

وفيما يلي سنعرض طريقة هومونربي الاضراب [7-10-12]

بفرض لدينا المعادلة :

$$A(u) - f(r) = 0 \qquad (14)$$

حيث A مؤثر تفاضلي و f(r) دالة تحليلية [4] .

إن (14) تكتب بالشكل :

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0$$

حيث A يقسم إلى مؤثرينL خطي و N غير خطي

ننشئ الهوموتوبي :

$$H(v;p): \Omega \times [0,1] \to R$$

الذي يحقق :

$$H(v,p) = (1-p)\big(L(v) - L(u_0)\big) + p\big(A(v) - f(r)\big) = 0 \qquad (15)$$

أو

$$H(v,p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p\big(N(v) - f(r)\big) = 0 \qquad (16)$$

حيث ان u_0 تقريب ابتدائي للمعادلة (2) وأن $p \in [0,1]$.

نفرض أن حل (15)، (16) كما يلي :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + p^3 v_3 + \cdots \qquad (17)$$

نعوض (17) في (16) ، (15) ونطابق حسب قوى p نوجد v_iحيث .....i=0,1,2,3

وبالتالي يكون حل المعادلة (14) بالشكل التالي :

$$u = \lim_{p\to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots \qquad (18)$$

- **دارسة تقارب طريقة هوموتوبي الإضراب:**

أهتم الباحثون بدارسة تقارب **طريقة هوموتوبي الإضراب** وقدرتها على الوصول إلى الحل الفعلي للمعادلات التفاضلية [1-14]، وسنعرض دراسة لتقارب هذه الطريقة متمثلة في المبرهنة التالية:

مبرهنة :

ليكن **N** مؤثراً غير خطي من فضاء هلبرت أي :N:H→ H ،إن متسلسلة الحل المعرفة بالعلاقة (18) تتقارب إلى$u \in H$ إذا وجد 0<λ<1 بحيث $\|v_{n+1}\| \le \lambda \|v_n\|$ وذلك من أجل أي $n \in N$.

البرهان :

نعرف المتتالية $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ كما يلي :

$$S_0 = 0$$
$$S_1 = v_1$$

$$S_2 = v_1 + v_2 \qquad (19)$$

$$\vdots$$

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots v_n$$

نريد برهان $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ متتالية كوشية في فضاء هلبرت . من أجل ذلك لدينا :

$$\|S_{n+1} - S_n\| = \|v_{n+1}\| \le \lambda\|v_n\| \le \lambda^2\|v_{n-1}\| \le \cdots$$

$$\le \lambda^{n+1}\|v_0\| \qquad (20)$$

من أجل كل $n, m \in$ بحيث $n \ge m$ يكون لدينا :

$$\|S_n - S_m\| = \|(S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \cdots$$

$$+ (S_{m+1} - S_m)\|$$

$$\le \|(S_n - S_{n-1})\| + \|(S_{n-1} - S_{n-2})\| + \cdots \|(S_{m+1} - S_m)\|$$

$$\|S_n - S_m\| \le \lambda^n\|v_0\| + \lambda^{n-1}\|v_0\| + \lambda^{m+1}\|v_0\|$$

$$\le (\lambda^n + \lambda^{n-1} + \cdots + \lambda^{m+1})\|v_0\|$$

$$\le \lambda^{m+1}(1 + \lambda + \lambda^n + \lambda^{n-1} + \cdots + \lambda^{n-m+1})\|v_0\| \qquad (21)$$

$$\le \frac{1-\lambda^{n-m}}{1-\lambda}\lambda^{m+1}\|v_0\|$$

بما أن $1 > \lambda > 0$ فإن :

$$\lim_{n,m\to\infty}\|S_n - S_m\| = 0 \qquad (22)$$

وعليه تكون $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ متتالية كوشية في فضاء هلبرت ، وبالتالي فهي متقاربة ؛ لأن فضاء هلبرت تام ، وهذا يعنى أن متسلسلة الحل المعرفة بالعلاقة (18) متقاربة ، وبذلك يتم المطلوب .

تعريف من $i \in$ يتم تعريف الوسيط λ_i بالشكل :

$$\lambda_i = \begin{cases} \dfrac{\|v_{i+1}\|}{\|v_i\|} & , \quad \|v_i\| \ne 0 \\ 0 & \quad \|v_i\| = 0 \end{cases} \qquad (23)$$

عندئذ فإن متسلسلة الحل $\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} v_k$ تتقارب إلى الحل الفعلي عندما $0 \le \lambda_i < 1$

- **تطبيق**

مسألة انتشار الحرارة الممثلة بالمعادلة غير الخطية التالية :

$$u_t = u_{xx} - u_x - u^2 + uu_{xx} + u \qquad (24)$$

مع الشرط الابتدائية :

$$u(x,0) = e^x$$
$$u(x,t) = e^{x+t}$$

الحــــــــــــــل

أولا ـ باستخدام طريقة تحليل أدوميان :

إن المعادلة (24) تكتب بالشكل :

$$u_t = u_{xx} - u_x - (u^2 - uu_{xx}) + u \qquad (25)$$

إن الحد غير الخطي هو $u^2 - uu_{xx}$ والمؤثر الخطي هو مؤثر المشق الأول بالنسبة للزمن أي أن :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow L^{-1} = \int_0^t (.)dt$$

نطبق المؤثر العكسي على طرفي المعادلة (25) فنحصل على العلاقة التالية :

$$u(x,t) = e^x + \int_0^t u_{xx} - u_x - (u^2 - uu_{xx}) + u\, dt \qquad (26)$$

والآن نعوض العلاقتين (4) و(5) في 27 فنجد :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = e^x + \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)\right)_{xx} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)\right)_x - \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) + \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)\, dt \qquad (28)$$

$$\rightarrow u_0(x,t) = e^x$$

$$u_{k+1}(x,t) = \int_0^t (u_k(x,t))_{xx} - \big(u_k(x,t)\big)_x - A_k + u_k(x,t)dt \quad k \geq 0 \qquad (29)$$

وبالحساب نجد :

$$u_1(x,t) = e^x t$$

$$u_2(x,t)=\frac{e^x t^2}{2!}$$
$$u_3(x,t)=\frac{e^x t^3}{3!}$$
$$u_4(x,t)=\frac{e^x t^4}{4!}$$
$$u_5(x,t)=\frac{e^x t^5}{5!}$$
$$\vdots$$
$$u(x,t)=u_0(x,t)+u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3(x,t)+\cdots$$
$$u(x,t)=e^x\left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots\right)$$
$$\rightarrow\quad u(x,t)=e^{x+1}$$

ثانيا ـ باستخدام طريقة هوموتوبي الإضراب :

إن علاقة الهوموتوبي للمعادلة (24) هي :

$$(1-p)\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)+p\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial t}-u-u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u^2\right)=0$$
$$\rightarrow\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u_0}{\partial t}+p\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial t}-u-u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u^2\right)=0$$
$$\rightarrow\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u_0}{\partial t}+p\left(-\frac{\partial u_0}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}+u+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u^2\right)=0\qquad(27)$$

نفترض أن حل المعادلة (27) له الصيغة :

$$u=u_0+p^1u_1+p^2u_2+p^3u_3+\cdots\qquad(28)$$

نعوض العلاقة (27) في (28) ونطابق بين الحدود حسب أس الوسيط pفنجد :

$$p^0:\frac{\partial u_0}{\partial t}=\frac{\partial u_0}{\partial t}$$

$$p^1: \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 + u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - {u_0}^2$$

$$p^1: \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 + u_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + u_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - 2u_0 u_1$$

$\vdots$

$$p^j: \frac{\partial u_j}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_{j-1}}{\partial x^2} - \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x} + u_{j-1} + \sum_{k=0}^{j-1} u_k \frac{\partial^2 u_{j-k-1}}{\partial x^2} - \sum_{k=0}^{j-1} u_k u_{j-k-1}$$

$$\to u_j = \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_{j-1}}{\partial x^2} - \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x} + u_{j-1} + \sum_{k=0}^{j-1} u_k \frac{\partial^2 u_{j-k-1}}{\partial x^2} - \sum_{k=0}^{j-1} u_k u_{j-k-1} \right) dt \qquad (29)$$

حيث $j \geq 1$ ، وللتبسيط يمكننا اختيار التقريب الابتدائي $u_0(x,t)$ ، ومن العلاقة (21) نحصل على :

$$u_1(x,t) = e^x t$$

$$u_2(x,t) = \frac{e^x t^2}{2!}$$

$$u_3(x,t) = \frac{e^x t^3}{3!} \quad (30$$

$$u_5(x,t) = \frac{e^x t^5}{5!}$$

$\vdots$

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + \cdots$$

$$u(x,t) = e^{x}\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots\right)$$

$$\rightarrow \quad u(x,t) = e^{x+1} \qquad (31)31)$$

وهو الحل الفعلي للمسألة المدروسة ، ومن خلال العلاقة (23) يتم برهان تقارب الحل التقريبي للمسألة المدروسة الى الحل الفعلي حيث :

$$\lambda_1 = 0.500000 < 1$$

$$\lambda_1 = 0.33333 < 1$$

$$\lambda_1 = 0.250000 < 1$$

جدول (1)

يمثل جدول (1) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لطريقتين من أجل تكرارات كما موضح العمود الأول من اليسار يمثل قيم x والعمود الثاني القيم الفعلية والعمود الثالث لـ ADM والعمود الرابع HPM والعمود الخامس يعطي الخطاء المطلق نسبة إلي القيم الفعلية .

t=0.5 X	Exact value	ADM	HPM	Error ADM	Error HPM
0.01	1.6652912	1.6650046	1.6650046	0.0002866	0.0002866
0.02	1.6820276	1.6817381	1.6817381	0.0002895	0.0002895
0.03	1.6989323	1.6986399	1.6986399	0.0002924	0.0002924
0.04	1.7160069	1.7157115	1.7157115	0.0002954	0.0002954
0.05	1.7332530	1.73295470	1.73295470	0.0002983	0.0002983
0.10	1.8221188	1.8218052	1.8218052	0.0003136	0.0003136
0.11	1.8404314	1.8401146	1.8401146	0.0003168	0.0003168
0.12	1.8589280	1.8586081	1.8586081	0.0003200	0.0003200
0.13	1.8776106	1.8772874	1.8772874	0.0003232	0.0003232
0.14	1.8964809	1.8961545	1.8961545	0.0003264	0.0003264
0.15	1.9155408	1.9152111	1.9152111	0.0003297	0.0003297

ونلاحظ دقة طريقتي HPM ــــــ ADM في هذا المثال من خلال النتائج العددية التي نراها في الجدول (1) :

الاستنتاج :

لقد قمنا بتطبيق طريقتي**تحليل أدوماين** و**هوموتوبي الإضراب** لحل مسالة من المعادلات التفاضلية الجزئية الغير خطية وخاصة إن لم يتوفر الحل الفعلي لها , فهي بذلك قد ساهمت في حل هذه المسائل ومن هنا نلاحظ أهمية الطرائق التقريبية وقدرتها على حل أصعب المسائل ودقتها العالية كما رأيناها في الدراسة العددية (النتاج السابقة تحصلنا عليها من خلال استخدام برنامج (Mathematicla 8)

الهوامش :

[1] ABASSY ,T 2012 - Modified variational iteration method (non homogeneous initial value problem) .Mathematical andComputer Modelling . Vol .55, 1222-1232p .

[2] ABDELRAZEC , A.H.M . 2008 - AdomianDecompositionMethod : Convergence Analysis and Numerical Approximations . McMaster University , Canada , 58p .

[3] ALAO ,S ., AKINBORO , F. S.,AKINPELU , F.O. & ODERINU ,R .A. 2014 - Numerical Solution of IntegroDifferential Equation Using Adomian Decomposition and VariationalIterationMethods .IOSR Journal of Mathematics .Vol .10 , 18-22p .

[4] DENIZ, S. &BILDIK , N.2014- Comparison of Adomian Decomposition Method and Taylor Matrix Method in Solving Different Kinds of Partial Differential . International Journalof Modeling and Optimization .Vol .4 , 292-298p .

[5] HOLMQUIST , S.M . 2007 - An Examination of theEffectiveness of the Adomian Decomposition Method inFluid Dynamic Applications . University of Central Florida , USA , 158p.

[6] MUHAMMAD , G . 2009 -AdomianDecompositionSolution of Some Nonlinear and Nonlocal Problems. National College of Business Administration & Economic Lahore ,Pakistan , 124p.

[7] RADHIKA ,T.S.L . , LYENGAR , T. K .V . & RAJA RANI . T. 2015- Approximate Analytical Methods for SolvingOrdinary Differential Equations. CRC Press Taylor & Francis Group , USA , 200p .

[8] WAZWAZ , A. M.2009- Partial Differential Equations andSolitary Waves Theory . Higher Education Press Beijing and Springer-Verlag Heidelberg , USA , 761p .

[9] WAZWAZ , A. M.2011 -Linear and Nonlinear IntegralEquations: Methods and Applications. Higher Education, Beijing, Springer, Berlin , USA , 658p.

[10] Biazar, J &Ghazvini, H . 2009 – Convergence of thehomotopy perturbation method for partial differentialequations. Vol .10 , 2633-2640.

[11] Desai , K .R . &V.H.Pradhan. 2013 _ Solution by Homotopy Perturbation Method of Linear andNonlinearDiffusion Equation. International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering .Vol .3 , 171-175 p .

[12] Shijun , L . 2012_ Homotopy Analysis Method inNonlinearDifferential Equations . Springer , New York , 566p.

[13] Singh,R.Singh,S .&WAZWAZ , A. M.2016 – Amodifiedhomotopy perturbation method forsingulartime dependent Emden–Fowler equation withboundary conditions. Springer International Publishing Switzerland . Vol .54 , 918-931.

[14] Turkyilmazoglu ,M.2011- Convergence of theHomotopy Perturbation Method.Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul. Vol .12 , 9-14.

[15] HERMANN, M. and SARAVI, M., (2016). " Nonlinear Ordinary Differential Equations: Analytical Approximation And Numerical Methods", Springer

[16] IRANDOUST-PAKCHIN, S. and AHMADIAN, D., (2015). "Homotopy Analysis Method For Computing Eigenvalues Of Sturm-Liouville Problems", International Journal Of Nonlinear Science 19(2):100-.601

[17] ZADEH JAFARI, H, and KARIMI , M., (2010)." Homotopy Analysis Method For Solving Integral And Integro Differential Equations", IJRRAS 2(2): 140-144

[18] ABBASBANDY, S., (2006). "The Application OfHomotopy Analysis Method To Nonlinee Equations Arising In Heat Transfer", Physics Letlers A 360(1): 109-113.